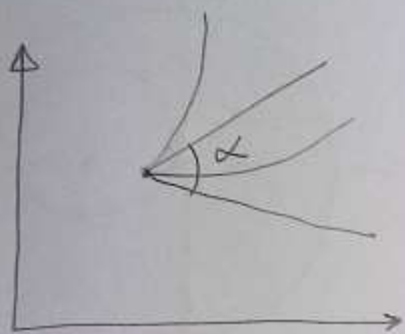
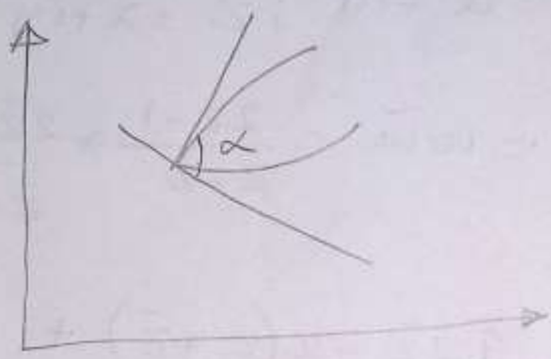
Lec 18   <u>Conformal mapping</u>

A map $f(z)$ on a domain D is saied to be conformal on D if it's perselves the angle "both magnitude and orientation"





$$w = f(z) = u + iv$$

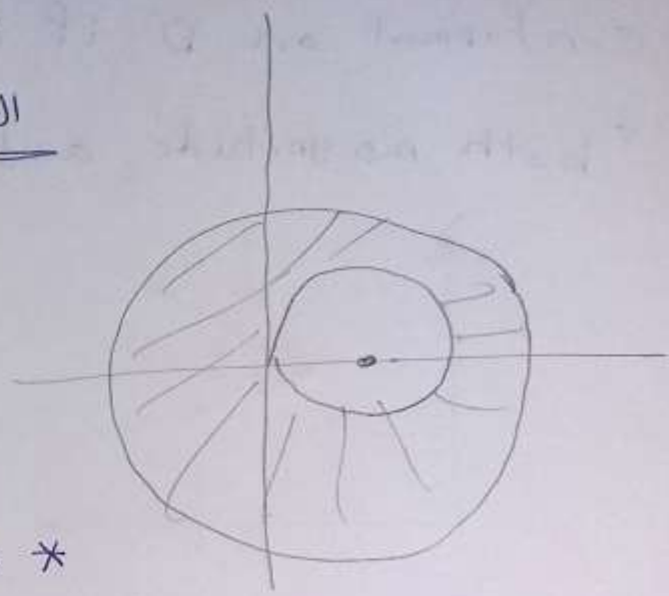
* $f(z)$ is conformal on $D \Longleftrightarrow f(z)$ is analytic on D and $f'(z) \neq 0$ on D

ـــ الهدف من هذه الدراسة هو دراسة شكل المناطق في مستوى (x,y) عند نقلها إلى دالة $f(z)$ analytic وفي بداية الأمر يكون معلوم أن الدالة (analytic) تحافظ على مقدار الزوايا وإتجاهها عند النقط التي بها $f(z)=0$.

ـــ في الصيف ـ نحاول التفكير في تطبيق هندسي من خلال معلومات هذا الجزء تجعلنا نعطي معالج صورة أو منطقة.

$\boxed{Ex}$ Find the image of the region between the circle $|z|=1$, $|z-\frac{2}{5}|=\frac{2}{5}$ by the map

$$w=\frac{2z-1}{z-2}$$



الحل

$w=u+iv$; $z=x+iy$

$$|w|^2=w\bar{w}=\frac{2z-1}{z-2}*\frac{2\bar{z}-1}{\bar{z}-2}$$

$$=\frac{4z\bar{z}-2(z+\bar{z})+1}{z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4} \longrightarrow *$$

$$|z|=1 \Rightarrow |z|^2=1 \Rightarrow z\bar{z}=1$$

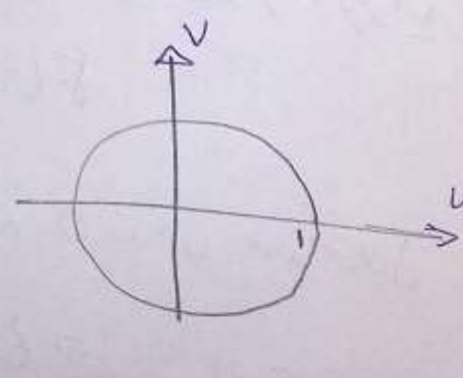
$$|w|^2=\frac{5-2(z+\bar{z})}{5-2(z+\bar{z})}=1$$

$|w|=1$ دائرة في uv-plane مركزها (0,0)

ونصف قطرها 1

$$|z-\frac{2}{5}|=\frac{2}{5} \Rightarrow |z-\frac{2}{5}|^2=\frac{4}{25}$$

$$(z-\frac{2}{5})(\bar{z}-\frac{2}{5})=\frac{4}{25}$$



$$z\bar{z} - \frac{2}{5}(z+\bar{z}) + \frac{4}{25} = \frac{4}{25}$$

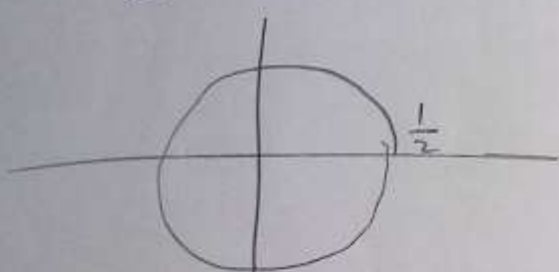
$$z\bar{z} = \frac{+2}{5}(z+\bar{z})$$

بالتعويض في *

$$|w|^2 = \frac{4z\bar{z} - 5z\bar{z} + 1}{z\bar{z} - 5z\bar{z} + 4} = \frac{1 - z\bar{z}}{4(1 - z\bar{z})}$$

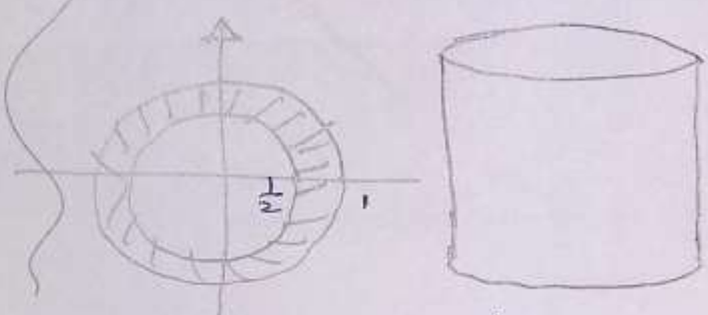
$$|w|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |w| = \frac{1}{2}$$

دائرة في (uv-plane) مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$



~~دائرتين~~

the map $w = \frac{2z-1}{z-2}$ maps conform region to



← من أهم الهندسية في هذا الجزء هو

الجهد الإلكتروستاتيكي بين إسطوانتين مركزهم نقطة الأصل

إذا تم إزاحة الإسطوانة الداخلية وتغيير مركزها لا يجوز

التعويض في شكل قوانين الصورة لذلك نلجأ

إلى (Conformal mapping) لتحويل المنطقة إلى دائرتين

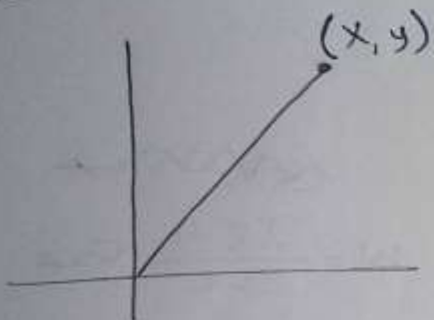
مركزهم نقط الأصل ثم نرجع لـ
(map) كما المثال السابق.

standard Forms

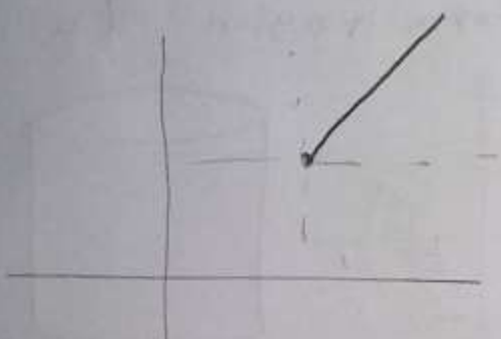
~~[٢] Linear map~~

~~$w = az + b$~~

some Notes



$$w = az$$
$$|w| = |a||z|$$
$$\arg w = \arg(a) + \arg(z)$$



[١] Linear map $w = az + b$

الدالة

١) تزيد الأطوال بمقدار $|a|$.

٢) تزيد المساحات بمقدار $|a|^2$.

٣) تدور الرسمة $\arg a$.

٤) الرسمة تنقل إلى النقطة $b = b_1 + ib_2$

$\boxed{Ex}$ use the map $w = (1+i)z + (4+5i)$ to find the image of the following regions.

① $|z| \leq 1$ and $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$

② the triangle with vertices $(-1,0), (1,0), (0,1)$

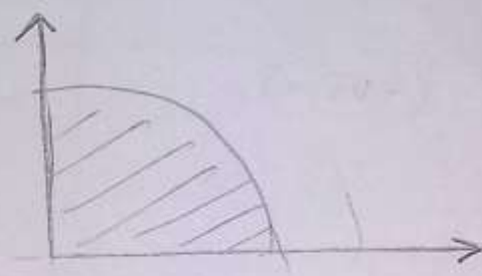
③ the rectangle $-1 \leq x \leq 1$; $-2 \leq y \leq 2$

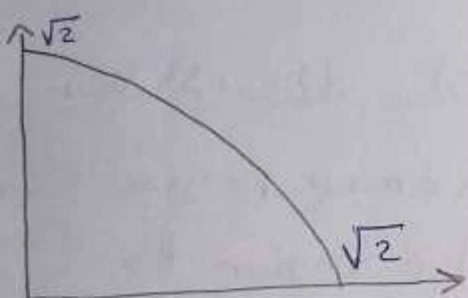
Sol

$\boxed{1}$

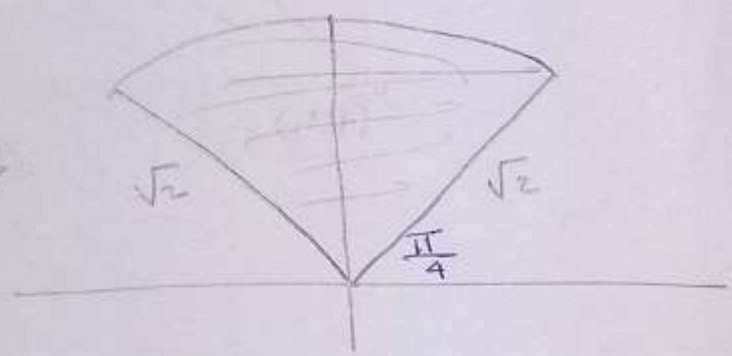
$a = 1 + i$

$|a| = \sqrt{2}$; $\arg a = \frac{\pi}{4}$

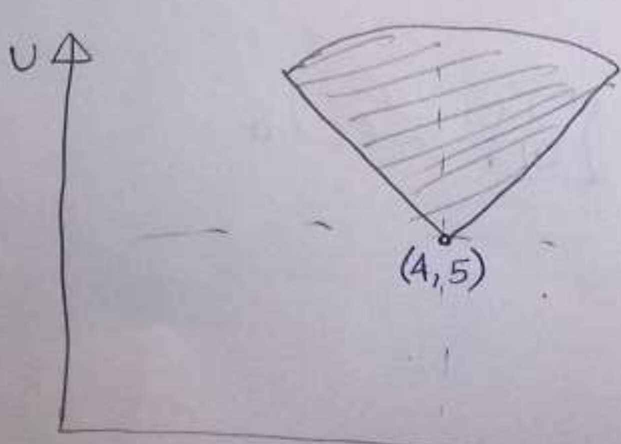




$\Rightarrow$

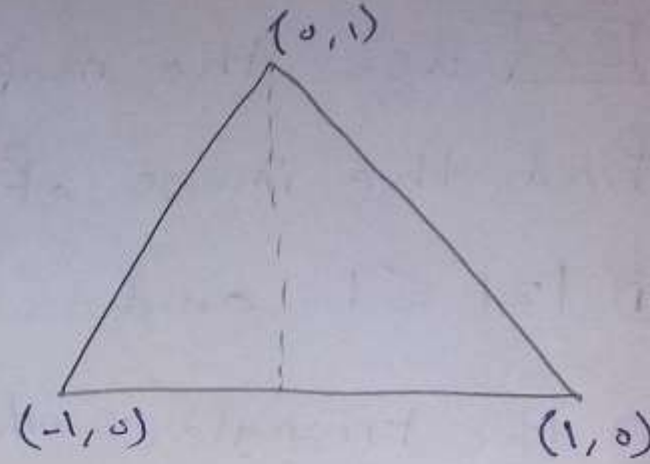


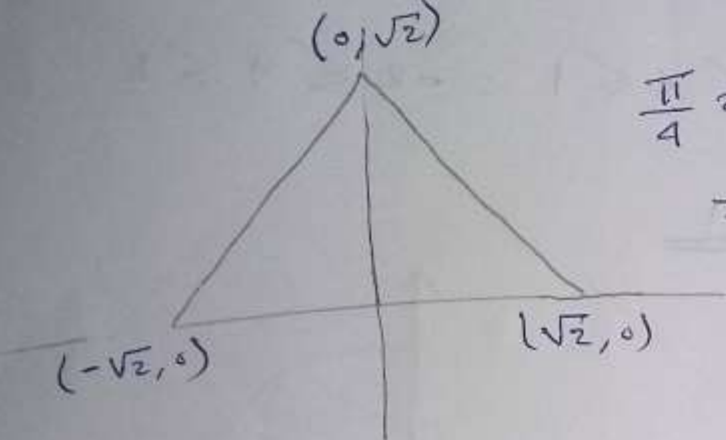
$b = 4 + 5i \rightarrow$ the map conform the region to.



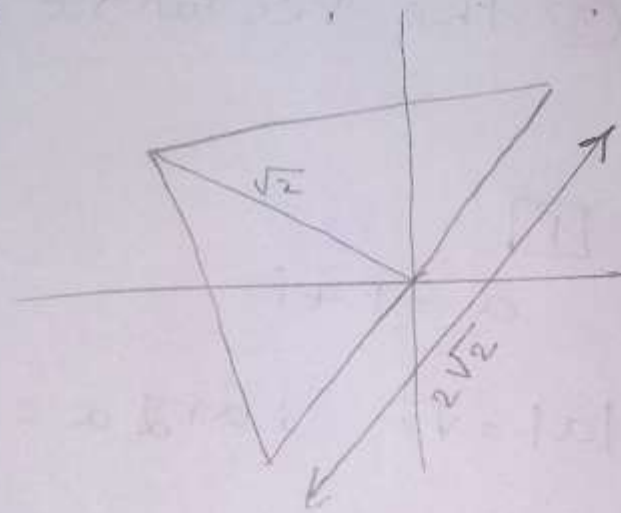
② نكبر الأطوال $\sqrt{2}$ والمساحات

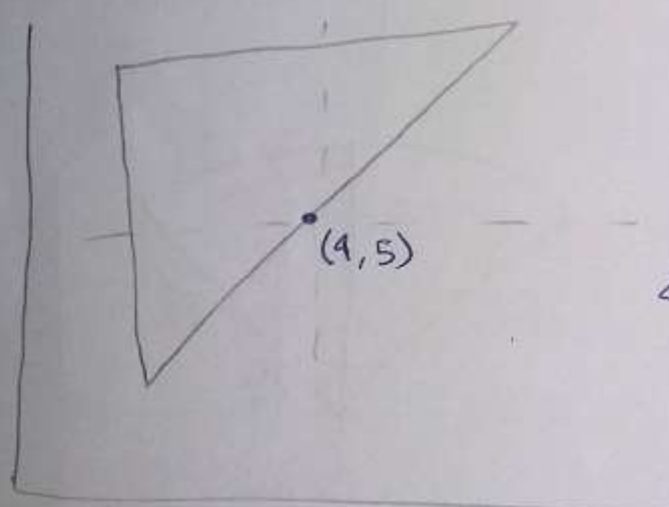
$|u|^2 = 2$





ندور الرسمة $\frac{\pi}{4}$





ننقل الرسمة إلى $(4,5)$

⇐ the map region conform the region to

$\boxed{2}$ <u>the map $w = z^n$</u>

$z = re^{i\theta} = x + iy$

$w = \rho e^{i\phi} = u + iv$

$w = z^n \Rightarrow |w| = |z|^n \qquad \therefore \boxed{\rho = r^n}$

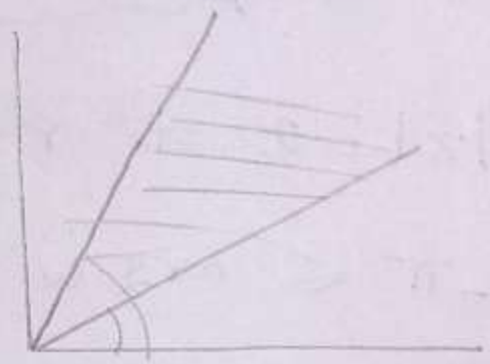
$\arg w = n \arg z \qquad \boxed{\phi = n\theta}$

(a) الدائرة التي نصف قطرها "a" تنتقل إلى الدائرة نصف قطرها "a^n".

(b) $\beta \leq \arg z \leq \alpha \Leftarrow \beta \leq \theta \leq \alpha$

$n\beta \leq n\theta \leq n\alpha$

$n\beta \leq \phi \leq n\alpha$



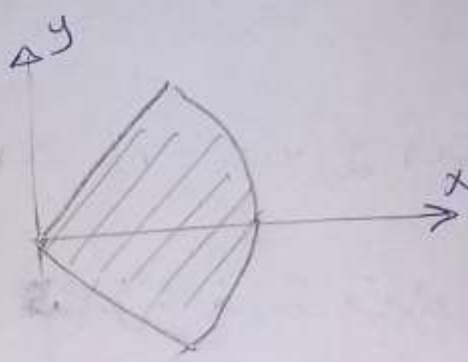
← إذا كان n عدد صحيح موجب فإن الزوايا بين الخطوط تضرب في n.

← تزويد الزوايا بين الخطوط بمقدار n.

$\boxed{Ex}$ Find the image of the region $|\arg z| \leq \frac{\pi}{3}$ and $|z| = 2$ under the map $w = z^3$.

$\boxed{Sol}$

$\frac{-\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$, $|z| = 2$



$w = \rho e^{i\theta}$

$\rho = r^3$, $\phi = 3\theta$

$\frac{-\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\pi \leq 3\theta \leq \pi$

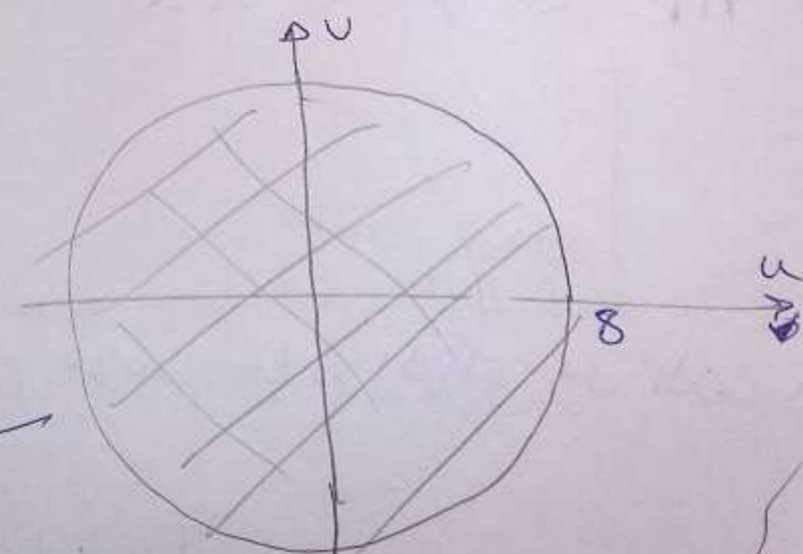
$-\pi \leq \phi \leq \pi \rightarrow (1)$

$|z| = 2 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \rho = 2^3$ $\boxed{\rho = 8} \rightarrow (2)$

$-\pi \leq \arg w \leq \pi$

$|w| = 8$

الدائرة بأكملها ←



$\boxed{3}$ the map $w = \frac{1}{z}$

$\boxed{Ex}$ show that the map $w = \frac{1}{z}$ transform equation of circle and lines.

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \longrightarrow (1)$$

to $D(u^2+v^2) + Bu - Cv + A = 0$

where $w = u + iv$.

$\boxed{\text{sol}}$

$$w = \frac{1}{z} \; ; \; \bar{w} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

$$w\bar{w} = u^2 + v^2$$

$$z = x + iy \quad , \quad \bar{z} = x - iy$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad ; \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

بالتعويض في (1)

$$A z\bar{z} + \frac{B}{2}(z+\bar{z}) + \frac{C}{2i}(z-\bar{z}) + D = 0$$

$$z = \frac{1}{w} \; , \; \bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$$

$$A\left(\frac{1}{w\bar{w}}\right) + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}}\right) + \frac{C}{2i}\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}}\right) + D = 0$$

بالضرب ③ $w\bar{w}$

$$A + \frac{B}{2}(w + \bar{w}) + \frac{C}{2i}(\bar{w} - w) + D w\bar{w} = 0$$

$$w\bar{w} = u^2 + v^2 \quad ; \quad u = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$$

$$; \quad v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w})$$

$$\therefore \quad A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0$$

Ex: find the image of the following curves by $w = \frac{1}{z}$

① the Line $2x + 4y + 1 = 0$

② the Circle $|z - 1| = 2$

A	B	C	D
D	B	-C	A

$\boxed{\text{Sol}}$

① $A = 0 \; ; \; B = 2 \; ; \; C = 4 \; ; \; D = 1$

$$(u^2 + v^2) + 2u - 4v = 0$$

②

$$|(x-1) + iy| = 2 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4 = 0$$

$$(x^2+y^2) - 2x - 3 = 0$$

$$A = 1 \qquad B = -2 \qquad C = 0 \qquad D = -3$$

$$\Rightarrow -3(u^2+v^2) - 2u + 1 = 0$$

$\boxed{4}$ the map $\quad w = z + \dfrac{1}{z}$

$$z = re^{i\theta} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$w = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$= r\cos\theta + ri\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta - \frac{i}{r}\sin\theta$$

$$w = \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

$$\boxed{u = \left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \ , \ v = \left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta}$$

ــ المطلوب استنتاج علاقة بين u, v, r نوجد منها شكل صورة الدوائر وصورة بين ال u, v, θ نوجد منها شكل صورة الزوايا بين الخطوط.

$$\frac{u^2}{\left(r+\frac{1}{r}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(r-\frac{1}{r}\right)^2} = 1 \rightarrow \text{قطع ناقص}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\left(r+\frac{1}{r}\right)^2-\left(r-\frac{1}{r}\right)^2=$$

$$r^2+2+\frac{1}{r^2}-r^2+2-\frac{1}{r^2}=4$$

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta}-\frac{v^2}{\sin^2\theta}=4$$

$$\frac{u^2}{4\cos^2\theta}-\frac{v^2}{4\sin^2\theta}=1$$

قطع زائد

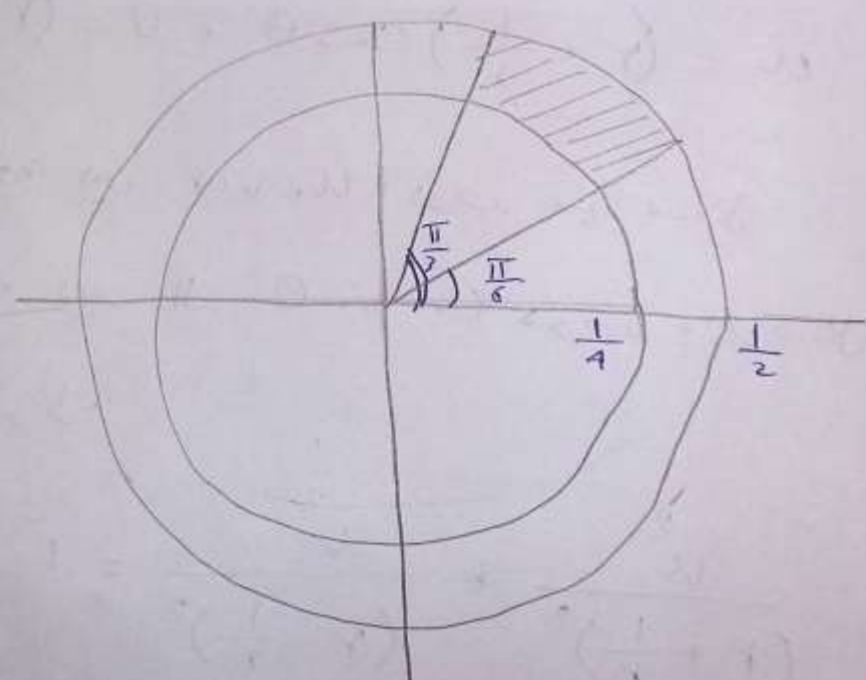
تنقل الخطوط بقطع ناقص و تنقل الزوايا بقطع زائد .

$\boxed{Ex}$ Conform the region $\frac{1}{4}\leq |z| \leq \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6}\leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ by the map $w=z+\frac{1}{z}$

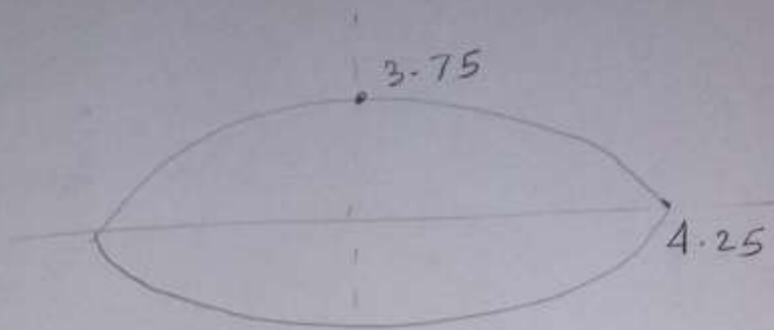
$$\frac{1}{4}\leq |z| \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}\leq r \leq \frac{1}{2}$$

$$r=\frac{1}{4}$$

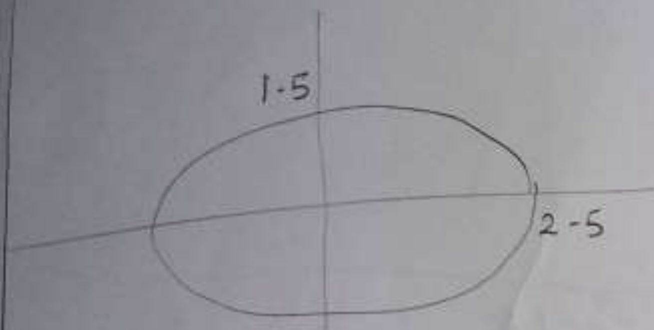


$$\frac{u^2}{(4.25)^2} + \frac{v^2}{(3.75)^2} = 1$$



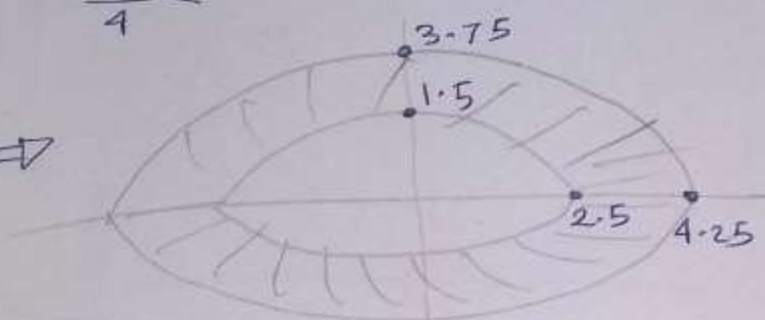
$r = \frac{1}{2}$

$$\frac{u^2}{(2.5)^2} + \frac{v^2}{(1.5)^2} = 1$$



$\Rightarrow$

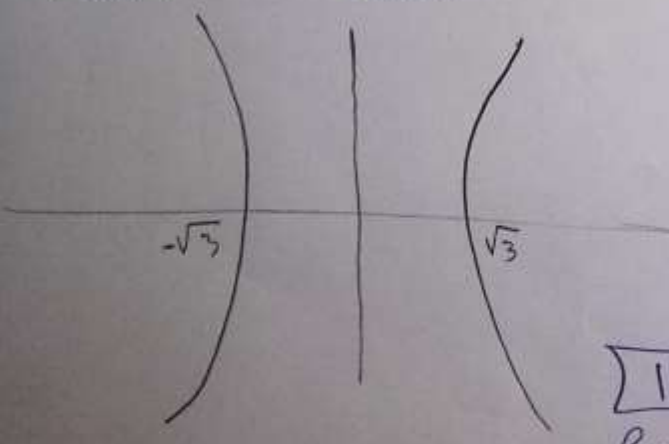
$\frac{1}{4} \le r \le \frac{1}{2}$ its image



$$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

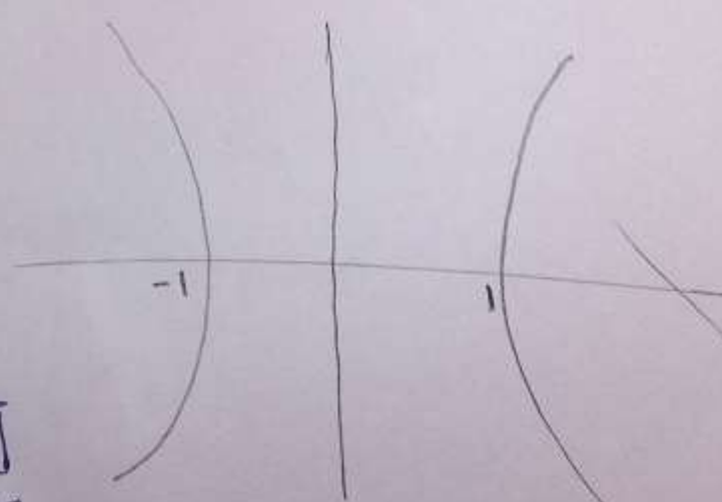
at $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{u^2}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{v^2}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

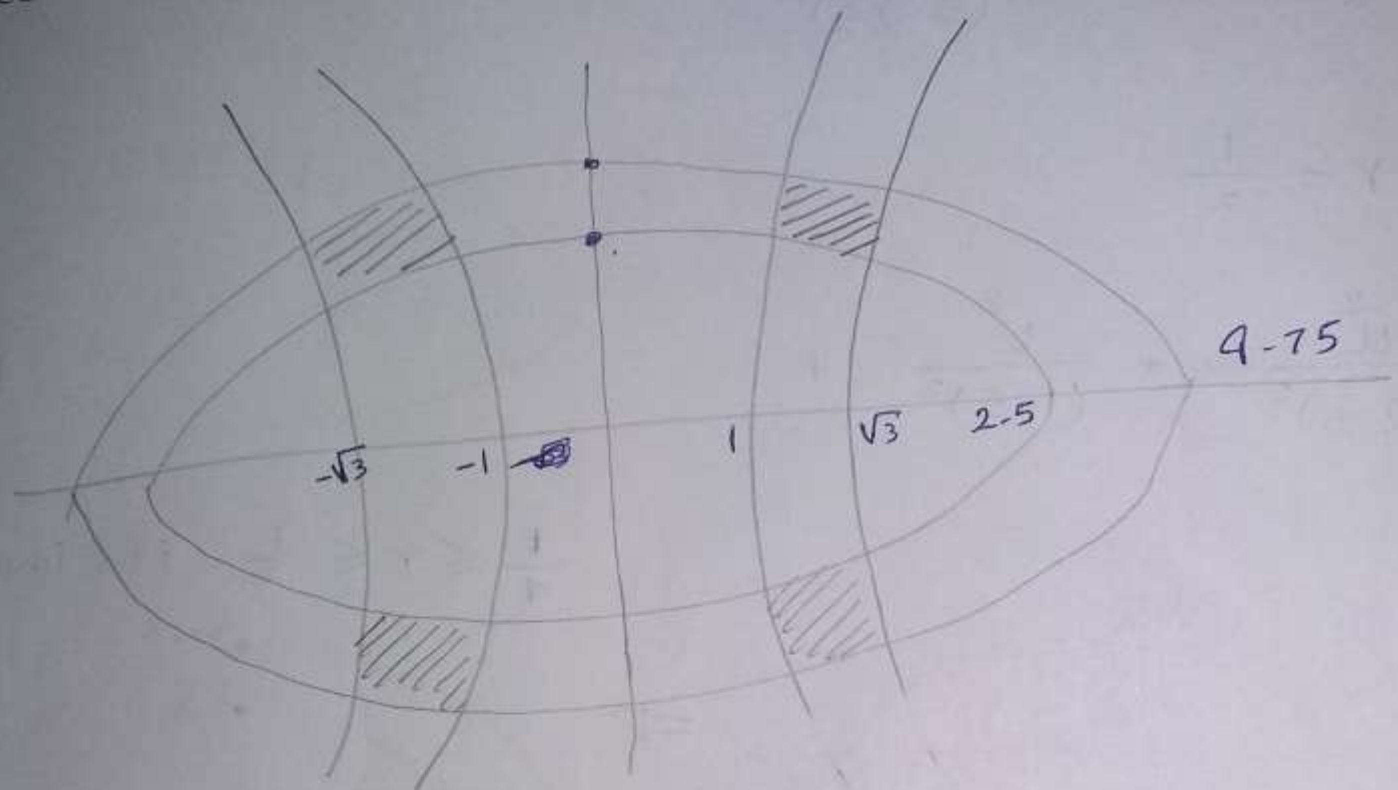


at $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{u^2}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{v^2}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$



the map $w = z + \frac{1}{z}$ Conform the region to:-



[14] Lec18